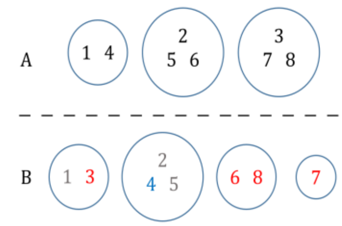
一个组合分组分配问题的探讨

吴杰，天普大学，计算机与信息科学系，jiewu@temple.edu

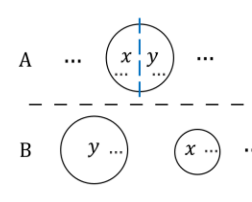


近年来我常用下面的考题来考察学生的分析和逻辑思维能力：一位教授把他的八位学生分成三组 (划分 A) 搞科研。第二年, 这些学生又被重新分成四组 (划分 B) 。请证明：至少存在两位学生, 他们在划分 B 下各自所在分组人数小于其原来在划分 A 中所在的分组。例如右图, 划分 A 是{1，4}，{2，5，6}， {3，7，8}, 而 B 是{1，3}，{2，4，5}，{6，8}， {7}。这种情况下, 学生 3，6，7，8 在划分 B 下所在组的人数小于划分 A 下所在组人数, 而只有学生 4 在划分 B 下所在组人数大于原来所在组。

这道题的结论可以推广到任意多个学生，只要求两个划分中组数之差为 1。解答此题并不简单, 不少学生试图用抽屉原理或在两个划分下学生一一对应来求解但并未获得成功。上星期一位学生告诉我类似题在组合数学的书中出现, 并附漂亮的解法。当时有点沮丧, 本以为这道题是原创, 但又很兴奋, 因为我的 “非常规解法” (解答 4) 也很有意思, 同时又想出了两种解法 (解答 1 和 解答 2), 供大家参考和指正 。(建议在继续阅读前，花些时间思考解题方案，这样对以下解答会有更好的理解。) 解答 1 和 2 基于两个中间结果, “事实”, 推到最后结果。(页下注解通过反证来解释这两个事实。)

事实 1: 如果划分 B 比 A 有更多的组, 一定有一位学生其在划分 B 下的组比在划分 A 下的组要小。
事实 2: 假设划分 A 和 B 有同样个数的组。如果存在一位学生在划分 B 下的组比划分 A 下的小, 一定有另一位学生在划分 B 下的组比划分 A 下的大。

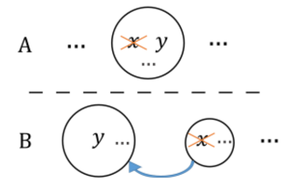
解答 1 和解答 2 先用事实 1 来找到满足条件的第一位学生 x, 然后通过局部重组使 A 和 B 组数相等, 通过事实 2 来找到满足条件的第二位学生。解答 1 是分拆 A 下 x 所在组使得 A 和 B 有相同的组数。解答 2 是去掉 B 下 x 所在组（去掉 x, 并将余下学生合并到其他一组）而达到目的。在重新划分时 B 保持组值 (组大小, 即组中学生的人数）不减, 而 A 保持组值不增, 以保证推断结论的传递性。



解答 1: x_A 和 x_B 分别代表划分 A 和 B 下学生 x 所在的组和组值 (组大小)。根据事实 1, 一定有第一位学生 x 满足 $x_B < x_A$。组 x_A 中任意找另一位学生 y, 如果 $y_B < y_A$, y 就是第二位学生, 原题得证。因此我们只要考虑 $y_B \geq y_A$ 的情况, 首先拆分组 y_A 成两组：一组含 x, 另一组含 y, 这样 A 变成新的划分 A'。A' 和 B 有同样的组数, 并且 $y_B \geq y_A > y_{A'}$。根据事实 2, 一定有另一位学生 z, 其 B 下组值小于 A' 下组值, 所以也小于划分 A 下组值。所以 z 就是满足条件的原有划分对 (A, B) 中的 第二位学生。

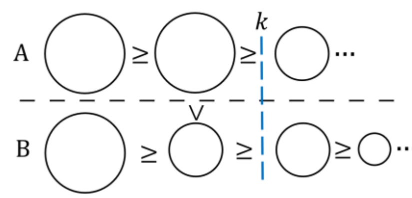
注解: 在事实 1 和事实 2 中，我们用“组值”来代表每位学生。而每个组值为 k 的组是有 k 位组值为 k 的学生组成。如果每位学生在划分 B 下组值不小于 A 下的组值，那么 B 下的组平均值不会小于 A 下的组平均值。事实 1 中，B 比 A 组多，B 下组平均则小于 A 下组平均，通过反证，一定有一位学生其 B 下组值小于 A 下组值。还有，如果有位学生在 B 下组值比 A 下大而其他学生在 A 和 B 下是相同，B 下组平均一定比 A 个组平均大。事实 2 中, A 和 B 平均值相同, 通过反证, 一定有另一位学生, 其 B 下组值比 A 下组值小。

解答 2: 和解答 1 类似找第一位学生 x。从 x_A 任取 y，如果 $y_B < y_A$, y 就是第二位学生，因此只需考虑 $y_B \geq y_A$。从划分对 (A, B) 产生新的划分对 (A', B'): 从 x_A 和 x_B 去掉 x，并把 x_B 余下的学生放到 y_B。因为 $y_{B'} > y_{A'}$，根据事实 2，划分对 (A', B') 一定有另一位学生 z，使得 $z_{B'} < z_{A'}$。由于 $z_A \geq z_{A'}$ 和 $z_{B'} \geq z_B$，我们有 $z_B < z_A$。所以 z 就是划分对 (A, B) 中的第二位学生。



下面介绍《漫游组合数学》(A Walk Through the Combinatorics) 书中的一个直接解。首先对划分 A 和 B 的组分别进行排序，组值从大到小。对 A 和 B 找共同的最短前缀序列组，并满足下面条件：A 的最短前缀序列的组值之和大于相应的 B 的最短前缀序列的组值之和。然后证明 A 的最短前缀中至少有两位学生在 B 下只能放在排序在后组值小的组里。

解答 3: a_i 和 b_i 分别代表划分 A 和划分 B 下的组和组值。将 A (和 B) 根据组值做排序，从大到小：a_1，a_2，… (和 b_1，b_2，…)。找一个最小的下标 k 满足：$a_1 + a_2 + \ldots + a_k > b_1 + b_2 + \ldots + b_k$。这个 k 一定存在，因为在相同人数情况下 B 比 A 多一个组。显然，$a_k > b_k$。由此可推导出 $[(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_k)] + b_k \geq 1+1 = 2$。换句话说，$a_1$，$a_2$，…，$a_k$ 中至少有两位学生不能放在 b_1，b_2，…，b_{k-1}, 只能放在组值小的 b_k，b_{k+1}，… 。



最后解答 4 引进一个辅助量：一元人民币。两个划分中的每个组都分配一元，然后分发给组里的每个学生。通过两个不同的 “记帐” 法，用反证法来推断结论。

解答 4: 给每组发一元，在组里每个学生平分。划分下每位学生分到的钱大于 0，但不超过一元。每位学生在 B 下和 A 下的收入之差将小于一元。假设划分 B 下最多只有一位学生所在组值小于其在划分 A 下的组值，也就是只有此学生在划分 B 下拿到的钱比划分 A 多, 其他学生在 B 下拿到的钱都少于等于 A 下的。B 比 A 多一个组，B 多拿一元 。这样此学生在 B 下和 A 下的收入之差将大于等于一元。这里存在矛盾。所以原假设不成立，原题得证。

划分问题可以扩充到 B 和 A 组数之差为 k，这样至少有 k+1 学生在划分 B 下得组比划分 A 下的组小。解答 3 和 4 在微调后仍然适用。而解答 1 和 2 则不能直接证明，可能需要引进新的事实或引用多重归纳法，此处留待读者研讨。

这个故事给我们的启发是，在科研工作者培养创造力的过程中，独立工作有时候可能无法取得最好的结果，但这种能力的培养是至关重要的。非常规解有时会歪打正着，而获得意外惊喜。然后，通过与别人的结果比较后，会对研究的问题有更深入的理解。独立工作和参考已有工作是一个往复迭代过程，其合理的调节和平衡是一种艺术。最后，这里讨论的解答在一定的角度上应验了英国数学家哈代的名句：反证法是 “数学家最有力的武器之一”。